Aufgaben Experimentalphysik

Wie sähe die Druckverteilung in der Erdatmosphäre aus, wenn die Abnahme der Erdanziehung mit der Höhe h berücksichtigt wird? $g(h) \approx g(h{=}0) \cdot (1 - \ldots)$.

Aufgaben RdP

Gegeben sei ein Flächenstück in verallgemeinerten Polarkoordinaten (ρ, ϕ) mit der Metrik

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & f(\rho)^2 \end{pmatrix} , \qquad \text{also} \qquad (\mathrm{d}s)^2 = (\mathrm{d}\rho)^2 + f(\rho)^2 (\mathrm{d}\phi)^2 \; . \qquad (*)$$

Berechnen Sie für eine beliebige Funktion $f(\rho)$ die Flächenkrümmung mit der Gaußschen Formel

$$K = \tfrac{1}{2 g_{\rho\rho} g_{\phi\phi}} \Big\{ -\partial_\phi^2 g_{\rho\rho} - \partial_\rho^2 g_{\phi\phi} + \tfrac{1}{2 g_{\rho\rho}} (\partial_\rho g_{\rho\rho} \partial_\rho g_{\phi\phi} + \partial_\phi g_{\rho\rho} \partial_\phi g_{\rho\rho}) + \tfrac{1}{2 g_{\phi\phi}} (\partial_\phi g_{\phi\phi} \partial_\phi g_{\rho\rho} + \partial_\rho g_{\phi\phi} \partial_\rho g_{\phi\phi}) \Big\} \; .$$

Was ergibt sich für die Fälle

$$\text{(a)} \quad f(\rho) = \nu\rho \quad \text{mit} \quad 0 < \nu \leq 1 \qquad \text{und} \qquad \text{(b)} \quad f(\rho) = R \sin\tfrac{\rho}{R} \quad \text{mit} \quad R > 0 \quad ?$$

Zur Interpretation bestimmen Sie für Kreise um den Ursprung das Verhältnis $\frac{U(\rho)}{d(\rho)}$ von Umfang U zu Radius d. Wie unterscheiden sich die beiden Fälle für kleine d? Was passiert für große d? Geometrische Deutung? Um welche Flächen handelt es sich? Im Fall (b) gehen wir von der Radialkoordinate ρ zu einem Polarwinkel ϑ über mit $\rho = R\,\vartheta$ und erhalten mit $\phi = \varphi$ das bekannte Linienelement der Kugeloberfläche S^2 vom Radius R, nämlich $(\mathrm{d}s)^2 = ?$

Die durch $(*)$ gegebene Abbildung des Flächenstücks in die Ebene $\mathbb{R}^2$ mit Polarkoordinaten (ρ, ϕ) nennt man eine Azimutal-Projektion. Im Fall (b) gibt die resultierende Erdkarte den Abstand vom Nordpol längentreu wieder ($d{=}\rho$, mittabstandstreu), nicht jedoch allgemeine Winkel. Eine winkeltreue Erdkarte erhält man durch die stereographische Projektion

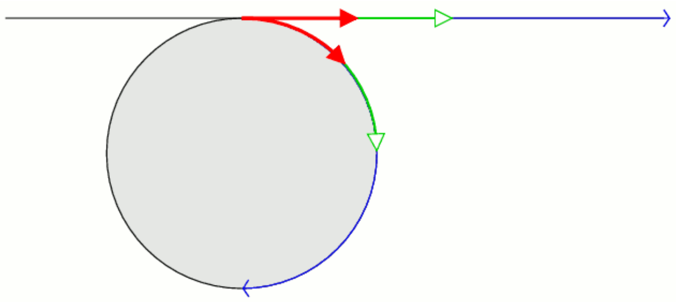
$$S^2 \to \mathbb{R}^2 \; , \quad (\vartheta, \varphi) \mapsto (r, \phi) \qquad \text{mit} \qquad r = 2R \tan\tfrac{\vartheta}{2} \quad \text{und} \quad \phi = \varphi \; ,$$

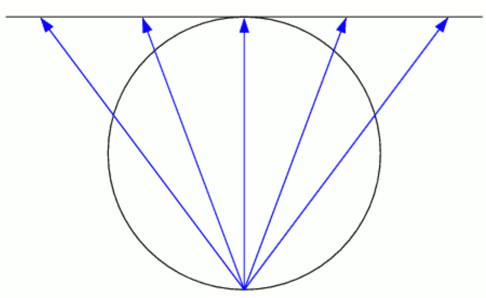
also $\frac{r}{2R} = \tan\frac{\rho}{2R}$. Zeigen Sie, dass – wenn in einer dreidimensionalen Anordnung die Bildebene die Sphäre im Nordpol berührt – der Bildpunkt (r, ϕ) auf dem Strahl vom Südpol durch (ϑ, φ) liegt. Wo im $\mathbb{R}^2$ landen Nordpol, Äquator und Südpol? Umseitig finden Sie Illustrationen.

Drücken Sie das sphärische Linien- und Flächenelement in den stereographischen Koordinaten aus. Wie groß ist der radiale Verzerrungsfaktor $\frac{r}{\rho}$? Entwickeln Sie ihn um den Nordpol bis $O(\frac{\rho}{R})$ oder $O(\frac{r}{R})$. Verifizieren Sie die sphärische Geometrie durch Berechnung von $\frac{U}{d}$ in der Erdkarte.

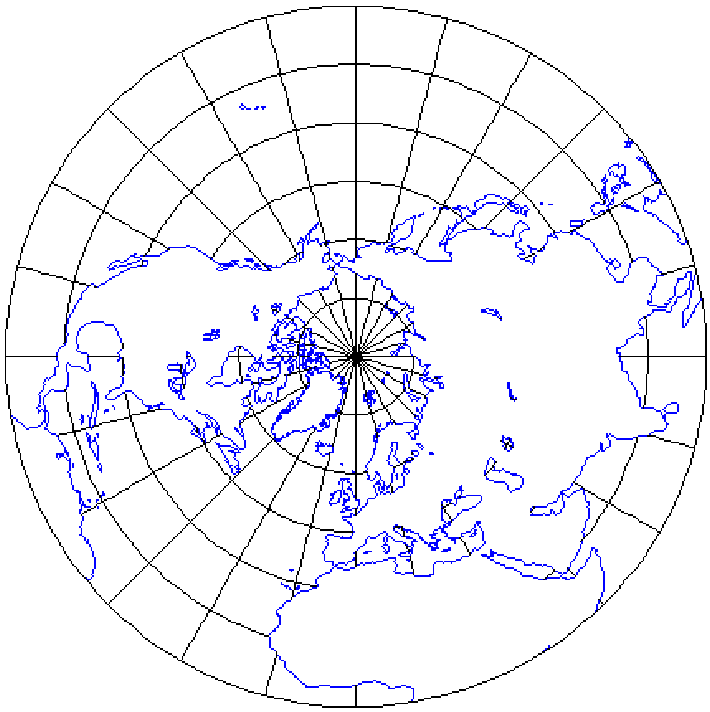
Als Deutschland-Cartoon nehmen wir ein sphärisches Rechteck $[\vartheta_N, \vartheta_S] \times [\varphi_W, \varphi_O]$. Berechnen Sie die wahre Landesfläche einmal auf S^2 und einmal auf der Karte. Test: Was ergibt sich für $[0, \pi] \times [0, 2\pi]$?

Nützlich: $\partial_x \arctan x = \frac{1}{1+x^2}$, $\quad \sin 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}$, $\quad \cos^2\alpha = \frac{1}{1+\tan^2\alpha} = \frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)$, $\quad \tan\epsilon = \epsilon + \frac{1}{3}\epsilon^3 + \ldots$





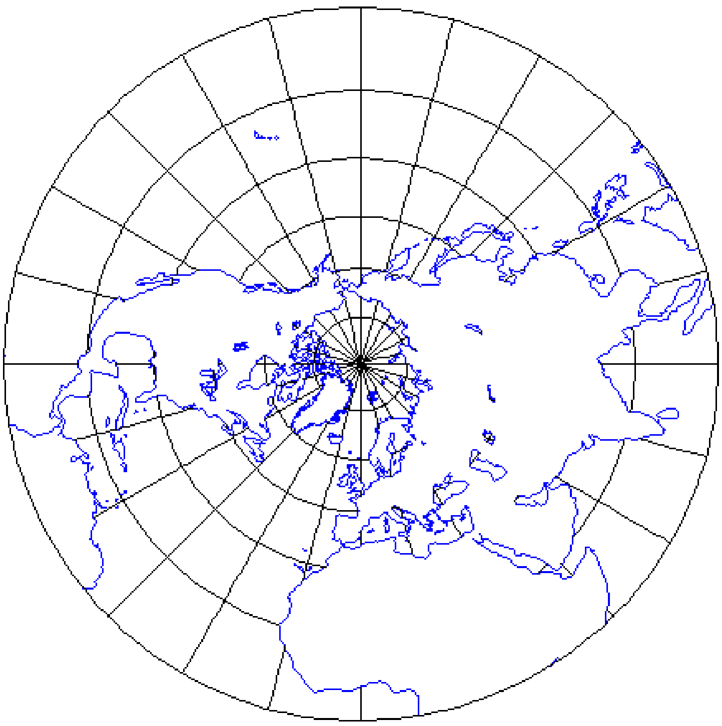
Abstandstreuer Azimutalentwurf



Normale Entwurfsachse (0, 90, 0)

Karto 4.5

Stereographische Projektion



Normale Entwurfsachse (0, 90, 0)

Karto 4.5